

FORMULAIRE DE RÉVISION

Tables de multiplication, règles de calcul : $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$, $\frac{a}{b} \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ et $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \frac{d}{c}$.

Règles de priorité dans les calculs :

1. Les calculs entre parenthèses sont prioritaires.
2. Les exposants sont prioritaires sur les multiplications, divisions, additions et soustractions.
3. Les multiplications et divisions sont prioritaires sur les additions et soustractions.

Tableau des fonctions usuelles :

Fonction	Ensemble de définition	Dérivée	Quelques propriétés
exp	$\mathbb{R}$	exp	continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$
ln	$]0, +\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{x}$	continue, strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
$x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}$)	$\mathbb{R}$	$x \mapsto nx^{n-1}$	continue, strictement croissante sur $[0, +\infty[$. $(a^n)^p = a^{np}$ et $a^n a^p = a^{n+p}$.
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	continue, strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.
$\sqrt{\cdot}$	$[0, +\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (pas dérivable en 0)	continue, strictement croissante sur $[0, +\infty[$
cos	$\mathbb{R}$	$-\sin$	continue, 2π périodique, paire
sin	$\mathbb{R}$	cos	continue, 2π périodique, impaire

Formules de dérivation : $(u + v)' = u' + v'$, $(uv)' = u'v + uv'$, $(ku)' = ku'$ ($k \in \mathbb{R}$),
 $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$

Identités remarquables : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Géométrie dans l'espace : Coordonnées de $\overrightarrow{AB} : (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

Coordonnées du milieu de $[AB] : \left(\frac{x_B + x_A}{2}, \frac{y_B + y_A}{2}, \frac{z_B + z_A}{2} \right)$

Norme de $\vec{u} = (x, y, z) : \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Produit scalaire de $\vec{u} = (x, y, z)$ et $\vec{v} = (x', y', z') : \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

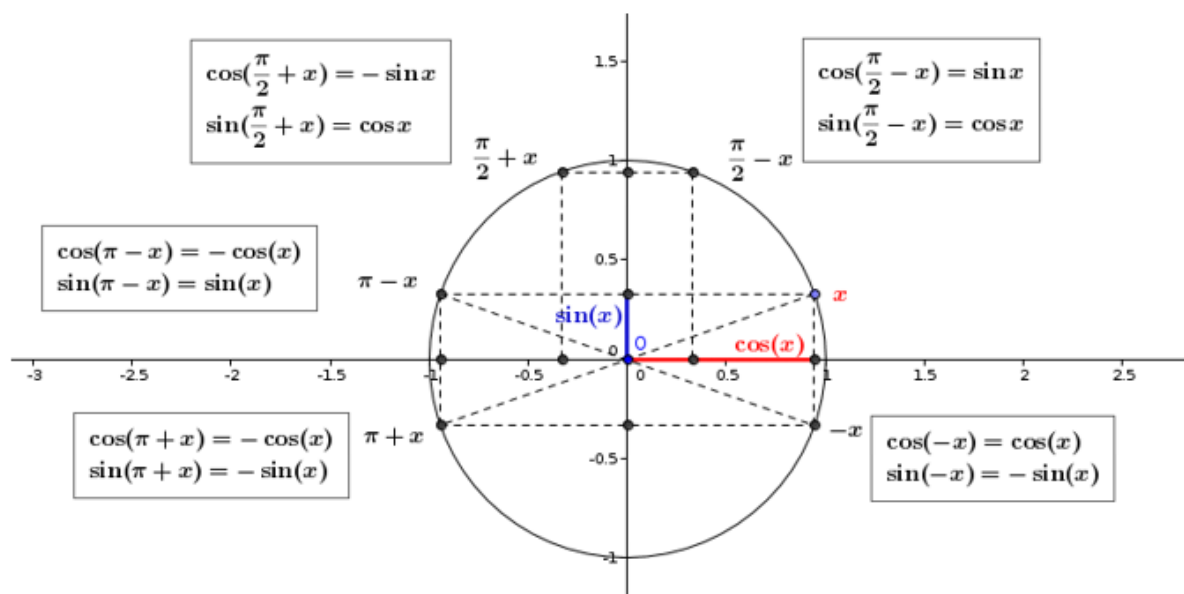
Formules trigonométriques :



$$\cos(x) = \frac{AC}{AB}, \sin(x) = \frac{BC}{AB}, \tan(x) = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1.$$

$\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$	$\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x \equiv 0[\pi]$
$\cos(x) = 1 \Leftrightarrow x \equiv 0[2\pi]$	$\sin(x) = 1 \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$
$\cos(x) = -1 \Leftrightarrow x \equiv \pi[2\pi]$	$\sin(x) = -1 \Leftrightarrow x \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$



En cas de difficulté vous pouvez nous contacter : sceroi@ac-strasbourg.fr (PCSI); severine.enault@ac-strasbourg.fr (MPSI)

EXERCICES DE RÉVISION

Le cerveau n'est pas un muscle. En revanche, il est possible de le muscler. Des nouvelles connexions neuronales se font au cours de la vie. Comme pour un réseau routier, une route bien entretenue permet de rouler à vitesse normale sans dommage.

Les exercices de cette section vous permettent de créer des automatismes de calculs et ses briques élémentaires de raisonnement vous seront utiles en classe préparatoire. Ne faites pas tous les exercices en une fois : comme pour les sportifs, il vaut mieux s'entraîner régulièrement. Vous pouvez aussi refaire les exercices en vos chronométrant en essayant d'améliorer votre temps, sans perte de justesse.

Exercice 1. Replacer les parenthèse oubliées dans chacune des expressions suivantes :

a) $32/4 + 3 \times 4 = 2$

c) $2 \times 3 + 1 + 2 = 12.$

b) $19 - 3 \times 5 = 80$

d) $4 \times 7 \times 2 + 5 \times 3 = 116$

Exercice 2. Calculer rapidement et sans machine à calculer

a) $1 \times 4 \times 21 + 0 \times 15 \times 5 + 6 \times 3 \times 6 - (4 \times 5 \times 6 + 6 \times 15 \times 1 + 3 \times 0 \times 21)$

b)
$$\frac{4 \times 5 - 5 \times 7 \times 2 - 4 \times 4 + 4 \times 5 \times 5}{17}$$

c) $\sqrt{3^2 + (-4)^2}, \sqrt{8^2 + 6^2}, \sqrt{4 \times 169 - 10^2}, \sqrt{7^2 + 24^2}.$

Exercice 3. Mettre sous forme de fraction simplifiée, sans calculatrice.

a) $\frac{2}{165} - \frac{3}{308}.$

c)
$$\frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}{\frac{5}{6} + \frac{1}{3}}$$

e) $\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{3} + 1\right).$

b) $\frac{1}{48} - \frac{1}{2} \frac{1}{4^2}.$

d)
$$\frac{2 - \frac{1}{3} + \frac{2}{5}}{6 - 2 \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{4}\right)}$$

f) $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$

Exercice 4. Développer et ordonner :

a) $(4x - 7x^2)(x^3 - 8x + 7)$

d) $(x + 2y)^3$

b) $(2x^3 + x + 1)(4x^2 - x + 5)$

c) $(x^3 - x + 2x^2 + 1)^2$

e) $(x - 1)(x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x + 1)$

Exercice 5. Factoriser en utilisant des identités remarquables.

a) $4x^2 + 4x + 1$

c) $(2x + 1)^2 - 25(3x + 2)^2$

b) $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$

d) $(x^2 + 8x + 4)^2 - (x^2 + 4)^2$

e) $x^4 - 4x^2 + 4$

Exercice 6. Factoriser le numérateur et le dénominateur pour simplifier la fraction.

a) $\frac{x^2 + 10x + 25}{x^3 + 5x^2}$

d) $\frac{x^3 - 1}{x - 1}$

b) $\frac{x^2}{2x^2 + x}$

e) $\frac{x^5 - 4x^3}{(x^2 + 1)^2 - 1}$

c) $\frac{x^3 - x}{x + 1}$

Exercice 7. Réduire au même dénominateur et simplifier.

a) $\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{x(x^2 - 1)},$

c) $\frac{1}{x - 1} + \frac{2}{x^2 - 1},$

b) $2 + \frac{3}{x} + \frac{x - 1}{3x} - \frac{x + 7}{6x},$

d) $\frac{2x^2}{x + 1} + \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 + x} + \frac{1}{x}.$

Exercice 8. Écrire le plus simplement possible (pour les fractions, on rendra entier les dénominateurs)

a) $\frac{1 + 2\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$ (on multiplie le dénominateur et le numérateur par $2 + \sqrt{3}$)

d) $(\sqrt{3}\sqrt{3})^4$

b) $\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$

e) $\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}$

f) $\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2}$

c) $\frac{4\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{\sqrt{6} + 1}$

g) $(\sqrt{2} + 3)^2 - (\sqrt{2} - 3)^2.$

h) $(\sqrt{2} + 3)^3 \times (\sqrt{2} - 3)^3.$

Exercice 9. Simplifier

a) $\frac{4^{-2} \times 8^3}{16^2}$

d) $\frac{a^8}{(a^2b^3)^5}$

b) $81^5 \times (3^{-2})^{-5} \times \frac{1}{9}$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{12} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{10}.$

e) $\frac{(a^2b)^3}{a^{-3}(-b)^2}$

Exercice 10. Simplifier

a) $\frac{a^{n^2}}{a^n}.$

e) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 \dots + (2n - 1) - 2n$

b) $(a^n)^3 \times (a^3)^n$

f) $(100^2 - 99^2) + (99^2 - 98^2) + \dots + (2^2 - 1^2) + 1^2$

c) $5^{n+2} - 5^{n+1} + 12 \times 5^n - 6 \times 5^{n-1}.$

d) $\frac{5^n \times 12^{2n}}{10^n \times 6^{4n}}.$

g) $\frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (2n - 1)(2n)}{2^n \times 1 \times 2 \times \dots \times n}$

Exercice 11. Résoudre

a) $4x = x^2$

d) $(x^2 - 2x + 3)(x^2 - 6x + 8) \leq 0$

b) $x^2 + 3x + 2 = 0$

c) $\frac{3}{x-2} \leq 4$

e) $x + \frac{1}{x} = 2$

Exercice 12. Dériver les fonctions définies par :

a) $f(x) = \frac{1}{x}$

i) $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$

r) $f(x) = \ln(3x-2)$

b) $f(x) = \frac{1}{x^3}$

j) $f(x) = \frac{x}{(x+4)^2}$

s) $f(x) = \ln(2x^2 + 1)$

c) $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

k) $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x-3)^2}$

t) $f(x) = \ln(\ln(x))$

d) $f(x) = \frac{1}{(x+1)^5}$

l) $f(x) = \sqrt{x-2}$

u) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

e) $f(x) = \frac{1}{(3-4x)^2}$

m) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 2x - 4}$

v) $f(x) = e^{2x}$

f) $f(x) = \frac{1}{(5x+1)^4}$

n) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

w) $f(x) = e^{2x^2} e^x e^2$

g) $f(x) = (x-2)(x-1)$

o) $f(x) = 5 \cos(3x+2)$

x) $f(x) = x^2 e^x$

h) $f(x) = (x+1)^2(3x+2)^2$

p) $f(x) = \sin(2x) \cos(5x)$

y) $f(x) = \cos(x) e^{2x}$

q) $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$

z) $f(x) = e^{x \ln x}$

Exercice 13. On considère la fonction f définie par $f(x) = -2x^2 + 3x + 5$.

1. Calculer
- $f'(x)$
- et dresser son tableau de signes.

En déduire les coordonnées du sommet de la parabole.

2. Calculer
- $f'(1)$
- et
- $f(1)$
- .

Déterminer l'équation réduite de la tangente T_1 à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 puis la tracer.

3. Déterminer le point d'intersection de
- T_1
- avec l'axe des abscisses.

4. Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe
- $\mathcal{C}_f$
- avec l'axe des abscisses.

EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Pour vous remettre dans le bain de la classe préparatoire, nous vous proposons des pistes/exercices. Les formules de cette page ne sont pas à connaître par coeur (pour le moment), vous pouvez (et devez !) utiliser des formules connues (page de formulaire).

Exercice 14. Formules trigonométriques

On admet les formules suivantes :

- $\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$,
 - $\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a)$,
 - $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$.
1. Montrer que $\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$
et $\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \sin(b) \cos(a)$.
 2. Montrer que $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2 \cos^2(a) - 1 = 1 - 2 \sin^2(a)$
et $\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a)$.
 3. En déduire $\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$.

Exercice 15. Somme des premiers termes d'une suite géométrique

Soit $q \neq 1$. Montrer que $\sum_{i=0}^n q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Exercice 16. Identités remarquables

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Montrer que $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
2. Développer $(a + b)^3$ et $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Exercice 17. Fonction tangente

On veut étudier la fonction $\tan = \frac{\sin}{\cos}$:

1. Montrer que son ensemble de définition est $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$.
2. Montrer qu'elle est π -périodique et impaire et que sa dérivée est $\frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$.

CORRECTION DES EXERCICES DE RÉVISION

Exercice 1. a) $32/(4 + 3 \times 4) = 2$

c) $2 \times (3 + 1 + 2) = 12.$

b) $(19 - 3) \times 5 = 80$

d) $4 \times (7 \times 2 + 5 \times 3) = 116$

Exercice 2. Idée : factoriser pour calculer plus vite.

a)

$$\begin{aligned} & 1 \times 4 \times 21 + 0 \times 15 \times 5 + 6 \times 3 \times 6 - (4 \times 5 \times 6 + 6 \times 15 \times 1 + 3 \times 0 \times 21) \\ &= 2 \times 3 \times 14 + 2 \times 3 \times 18 - 2 \times 3 \times 20 - 2 \times 3 \times 15 \\ &= 6 \times (14 + 18 - 20 - 15) = 6 \times (-3) = -18 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{4 \times 5 - 5 \times 7 \times 2 - 4 \times 4 + 4 \times 5 \times 5}{17} &= \frac{2}{17} (5(2 - 7 + 10) - 8) \\ &= \frac{2}{17} (25 - 8) = 2 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \sqrt{3^2 + (-4)^2} &= \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \\ \sqrt{8^2 + 6^2} &= \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10 \\ \sqrt{4 \times 169 - 10^2} &= \sqrt{4(13 - 5)(13 + 5)} = 2\sqrt{8 \cdot 18} = 2\sqrt{4^2 \cdot 3^2} = 24 \\ \sqrt{7^2 + 24^2} &= \sqrt{25^2} = 25 \text{ car } (24 + 1)^2 = 24^2 + 2 \cdot 24 + 1 = 24^2 + 49 = 24^2 + 7^2 \end{aligned}$$

Pour le dernier, on espère trouver un entier $n \geq 24$ dont le carré est égal à $7^2 + 24^2$ qui fini par un 9 + 6[10] = 5[10].
On essaie $25 = 24 + 1$.

Exercice 3. Idée : trouver le plus petit dénominateur commun et ne faire les calculs que si nécessaire, il faut simplifier dès qu'on peut.

a) $\frac{2}{165} - \frac{3}{308} = \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 11} - \frac{3}{4 \cdot 7 \cdot 11} = \frac{56 - 45}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} = \frac{11}{20 \cdot 21 \cdot 11} = \frac{1}{420}.$

b) $\frac{1}{48} - \frac{1}{2 \cdot 4^2} = \frac{1}{3 \cdot 4^2} - \frac{1}{2 \cdot 4^2} = \frac{2 - 3}{2 \cdot 48} = \frac{-1}{96}.$

c) $\frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}{\frac{5}{6} + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2 - 3}{6}}{\frac{5 + 2}{6}} = \frac{-1}{7}$

d) $\frac{2 - \frac{1}{3} + \frac{2}{5}}{6 - 2\left(\frac{4}{3} - \frac{3}{4}\right)} = \frac{\frac{30 - 5 + 6}{15}}{6 - 2\frac{16 - 9}{12}} = \frac{31}{15} \frac{6}{36 - 7} = \frac{62}{5 \cdot 29} = \frac{62}{145} = \frac{62}{145}.$

e) $\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{3} + 1\right) = \frac{3}{4} \frac{4}{3} = 1.$

f) $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{3}{2}}} = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$

Exercice 4. Idée pour gagner en rapidité/précision : développer par puissance

a) $(4x - 7x^2)(x^3 - 8x + 7) = -7x^5 + 4x^4 + 7 \cdot 8x^3 + (-4 \cdot 8 - 7^2)x^2 + 4 \cdot 7x = -7x^5 + 4x^4 + 56x^3 - 81x^2 + 28x.$

b) $(2x^3 + x + 1)(4x^2 - x + 5) = 8x^5 - 2x^4 + (2 \cdot 5 + 4)x^3 + (-1 + 4)x^2 + (5 - 1)x + 5 = 8x^5 - 2x^4 + 14x^3 + 3x^2 + 4x + 5$

- c) $(x^3 - x + 2x^2 + 1)^2 = x^6 + (2+2)x^5 + (-1+2^2-1)x^4 + (1-2-2+1)x^3 + (2+(-1)^2+2)x^2 + (-1-1)x + 1 = x^6 + 4x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 2x + 1$
- d) $(x+2y)^3 = (x^2 + 4xy + 4y^2)(x+2y) = x^3 + (2y+4y)x^2 + (8y^2+4y^2)x + 8y^3 = x^3 + 6yx^2 + 12y^2x + 8y^3$
- e) $(x-1)(x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x + 1) = x^{n+1} + (1-1)x^n + (1-1)x^{n-1} + \dots + (1-1)x^2 + (1-1)x - 1 = x^{n+1} - 1$

Exercice 5. Identités remarquables : $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$; $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

- a) $4x^2 + 4x + 1 = (2x)^2 + 2(2x) \cdot 1 + 1^2 = (2x+1)^2$
- b) $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = x^2 + 2x \frac{-1}{3} + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{3}\right)^2$
- c) $(2x+1)^2 - 25(3x+2)^2 = (2x+1)^2 - 5^2(3x+2)^2 = (2x+1)^2 - (5(3x+2))^2 = (2x+1)^2 - (15x+10)^2 = (2x+1-15x-10)(2x+1+15x+10) = (-13x-9)(17x+11) = -(13x+9)(17x+11)$
- d) $(x^2+8x+4)^2 - (x^2+4)^2 = (x^2+8x+4-x^2-4)(x^2+8x+4+x^2+4) = 8x(2x^2+8x+8) = 16x(x^2+4x+4) = 16x(x+2)^2$
- e) $x^4 - 4x^2 + 4 = (x^2)^2 - 2(x^2) \cdot 2 + 2^2 = (x^2-2)^2 = ((x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}))^2 = (x-\sqrt{2})^2(x+\sqrt{2})^2$

Exercice 6. Idée : utiliser les identités remarquables, factoriser par des puissances x sans rajouter de division éventuelle par 0.

a) $\frac{x^2 + 10x + 25}{x^3 + 5x^2} = \frac{x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2}{x^2(x+5)} = \frac{(x+5)^2}{x^2(x+5)} = \frac{x+5}{x^2}$

b) $\frac{x^2}{2x^2 + x} = \frac{x^2}{x(2x+1)} = \frac{x}{2x+1}$

c) $\frac{x^3 - x}{x+1} = \frac{x(x^2-1)}{x+1} = \frac{x(x-1)(x+1)}{x+1} = x(x-1)$

d) $\frac{x^3-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = x^2+x+1.$

On peut se rappeler du développement/simplification Exercice 4.c

On peut aussi voir que 1 est racine de $x^3 - 1$ et chercher $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que $(x^3 - 1) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et identifier les coefficients de même degré.

e) $\frac{x^5 - 4x^3}{(x^2+1)^2 - 1} = \frac{x^3(x^2-2^2)}{(x^2+1-1)(x^2+1+1)} = \frac{x^3(x-2)(x+2)}{x^2(x^2+2)} = \frac{x(x-2)(x+2)}{x^2+2}.$

Exercice 7. Idée : comme pour les rationnels, on essaie de mettre sur le plus petit dénominateur commun. On commence donc par factoriser les dénominateurs.

a) $\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{x-1}{x(x^2-1)} = \frac{x-1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)},$

b) $2 + \frac{3}{x} + \frac{x-1}{3x} - \frac{x+7}{6x} = \frac{6x \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 2(x-1) - (x+7)}{6x} = \frac{12x + 18 + 2x - 2 - x - 7}{6x} = \frac{13x + 9}{6x},$

c) $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+1+2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+3}{(x-1)(x+1)},$

d) $\frac{2x^2}{x+1} + \frac{2x^2-x-1}{x^2+x} + \frac{1}{x} = \frac{2x^2}{x+1} + \frac{2x^2-x-1}{x(x+1)} + \frac{1}{x} = \frac{2x^3+2x^2-x-1+x+1}{x(x+1)} = \frac{2x^3+2x^2}{x(x+1)} = \frac{2x^2(x+1)}{x(x+1)} = \frac{2x^2}{x} = 2x.$

Exercice 8. a) $\frac{1+2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{(1+2\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{2^2-\sqrt{3}^2} = \frac{2+(2 \cdot 2+1)\sqrt{3}+2\sqrt{3}^2}{4-3} = 5\sqrt{3}+8.$

b) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{5-2} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}$

c) $\frac{4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{\sqrt{6}+1} = \frac{(4\sqrt{3}+3\sqrt{2})(\sqrt{3}\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{6}+1)(\sqrt{6}-1)} = \frac{4\sqrt{3}^2\sqrt{2}+3\sqrt{2}^2\sqrt{3}-4\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{6-1} = \frac{9\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{5}$

d) $(\sqrt{3\sqrt{3}})^4 = (3\sqrt{3})^2 = 3^2\sqrt{3}^2 = 9 \cdot 3 = 27.$

e) $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = |\sqrt{3}-1| = \sqrt{3}-1$ car $\sqrt{3} > 1.$

- f) $\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} = |1 - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - 1.$
 g) $(\sqrt{2} + 3)^2 - (\sqrt{2} - 3)^2 = (\sqrt{2} + 3 - \sqrt{2} + 3)(\sqrt{2} + 3 + \sqrt{2} - 3) = 6 \cdot 2\sqrt{2} = 12\sqrt{2}.$
 h) $(\sqrt{2} + 3)^3 \times (\sqrt{2} - 3)^3 = ((\sqrt{2} + 3)(\sqrt{2} - 3))^3 = (\sqrt{2}^2 - 3^2)^3 = (2 - 9)^3 = -7^3 = -7 \cdot 49 = -(7 \cdot 50 - 7) = -(350 - 7) = -343.$

Exercice 9. Idée : utiliser les propriétés des puissances $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$.

- a) $\frac{4^{-2} \times 8^3}{16^2} = \frac{(2^3)^3}{(2^2)^2 (2^4)^2} = \frac{2^9}{2^{4+8}} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}.$
 b) $81^5 \times (3^{-2})^{-5} \times \frac{1}{9} = 9^{10} 3^{10} 9^{-1} = 3^{30} 3^{-2} = 3^{28}$
 c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{12} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{10} = \frac{2^{12-10}}{3^{12-10}} = \frac{4}{9}.$
 d) $\frac{a^8}{(a^2 b^3)^5} = \frac{a^8}{a^{10} b^{15}} = \frac{1}{a^2 b^{15}}$
 e) $\frac{(a^2 b)^3}{a^{-3} (-b)^2} = \frac{a^{6+3} b^3}{b^2} = a^9 b$

Exercice 10. a) $\frac{a^{n^2}}{a^n} = a^{n^2-n} = a^{n(n-1)}.$

- b) $(a^n)^3 \times (a^3)^n = a^{3n} \times a^{3n} = a^{6n}$
 c) $5^{n+2} - 5^{n+1} + 12 \times 5^n - 6 \times 5^{n-1} = (5^2(5-1) + (2 \cdot 5 - 1)6) 5^{n-1} = (100 + 54)5^{n-1} = 154 \times 5^{n-1}.$
 d) $\frac{5^n \times 12^{2n}}{10^n \times 6^{4n}} = \frac{5^n 2^{4n} 3^{2n}}{5^n 2^n 3^{4n} 2^{4n}} = \frac{1}{2^n 3^{2n}} = \frac{1}{(2 \cdot 9)^n} = \frac{1}{18^n}.$
 e) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 \dots + (2n-1) - 2n = \sum_{k=1}^n ((2k-1) - 2k) = \sum_{k=1}^n (-1) = -n$
 f) $(100^2 - 99^2) + (99^2 - 98^2) + \dots + (2^2 - 1^2) + 1^2 = \sum_{k=0}^{99} ((k+1)^2 - k^2) = \sum_{k=0}^{99} (2k+1) = 2 \sum_{k=0}^{99} k + \sum_{k=0}^{99} 1 = 2 \frac{99(99+1)}{2} + 100 = (99+1)100 = 10000$
 g) $\frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (2n-1)(2n)}{2^n \times 1 \times 2 \times \dots \times n} = 1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n-1).$

Exercice 11. a) $4x = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 4\}$

b) $x^2 + 3x + 2 = 0$

On calcule le discriminant : $\Delta = 3^2 - 2 \cdot 4 = 1$

Les racines sont : $r_1 = \frac{-3-1}{2} = -2$ et $r_2 = \frac{-3+1}{2} = -1.$

c) $\frac{3}{x-2} \leq 4 \Leftrightarrow \frac{3-4(x-2)}{x-2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{11-4x}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow x < 2$ ou $x \geq \frac{11}{4}$
 On peut faire un tableau de signe pour la conclusion.

d) $(x^2 - 2x + 3)(x^2 - 6x + 8) \leq 0$

On calcule le discriminant de $x^2 - 2x + 3$: $\Delta = (-2)^2 - 3 \cdot 4 = -8 < 0.$

Ainsi, $x^2 - 2x + 3 > 0.$

On calcule le discriminant de $x^2 - 6x + 8$: $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 8 = 36 - 32 = 4 = 2^2.$

Ainsi, ses racines sont : $r_1 = \frac{-(-6)-2}{2} = 2$ et $r_2 = \frac{-(-6)+2}{2} = 4.$ Donc $x^2 - 6x + 8 \leq 0$ si et seulement si $x \in [2, 4].$

e) $x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Exercice 12. On utilise les formules de dérivées usuelles.

La dérivée de $x \mapsto u(x)^\alpha$ est $x \mapsto \alpha u'(x)u(x)^{\alpha-1}$.

La dérivée de $x \mapsto \ln(u(x))$ est $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$.

La dérivée de $x \mapsto e^{u(x)}$ est $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$.

La dérivée de $x \mapsto \cos(u(x))$ est $x \mapsto -u'(x)\sin(u(x))$ et celle de $x \mapsto \sin(u(x))$ est $x \mapsto u'(x)\cos(u(x))$.

La dérivée de uv est $u'v + uv'$.

La dérivée de $\frac{u}{v}$ est $\frac{u'v + uv'}{v^2}$.

a) $f(x) = \frac{1}{x}, f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

b) $f(x) = \frac{1}{x^3}, f'(x) = \frac{-3}{x^4}$

c) $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}, f'(x) = \frac{-2}{(x+1)^3}$

d) $f(x) = \frac{1}{(x+1)^5} = (x+1)^{-5}, f'(x) = \frac{-5}{(x+1)^6}$

e) $f(x) = \frac{1}{(3-4x)^2}, f'(x) = \frac{-2(-4)}{(3-4x)^3} = \frac{8}{(3-4x)^3}$.

f) $f(x) = \frac{1}{(5x+1)^4}, f'(x) = \frac{-4 \times 5}{(5x+1)^5} = \frac{-20}{(5x+1)^5}$.

g) $f(x) = (x-2)(x-1), f'(x) = (x-1) + (x-2) = 2x-3$.

h) $f(x) = (x+1)^2(3x+2)^2, f'(x) = 2(x+1)(3x+2)^2 + (x+1)^2 \times 2 \times 3(3x+2) = 2(3x+2+3(x+1))(x+1)(3x+2) = 2(6x+5)(x+1)(3x+2)$

i) $f(x) = \frac{x-2}{x+3}, f'(x) = \frac{(x+3) - (x-2)}{(x+3)^2} = \frac{5}{(x+3)^2}$.

j) $f(x) = \frac{x}{(x+4)^2}, f'(x) = \frac{1}{(x+4)^2} + x \frac{-2}{(x+4)^3} = \frac{x+4-2x}{(x+4)^3} = \frac{-x+4}{(x+4)^3}$.

k) $f(x) = \frac{x^2+2x}{(x-3)^2}, f'(x) = \frac{2x+2}{(x-3)^2} + (x^2+2x) \frac{-2}{(x-3)^3} = \frac{2(x+1)(x-3) - 2(x^2+2x)}{(x-3)^3} = 2 \frac{x^2-2x-3-x^2-2x}{(x-3)^3} = 2 \frac{-4x-3}{(x-3)^3}$.

l) $f(x) = \sqrt{x-2}, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$

m) $f(x) = \sqrt{3x^2+2x-4}, f'(x) = \frac{6x+2}{2\sqrt{3x^2+2x-4}} = \frac{3x+1}{\sqrt{3x^2+2x-4}}$.

n) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}, f'(x) = \frac{(x-1) - (x+1)}{(x-1)^2} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = -\frac{1}{(x-1)^2} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

o) $f(x) = 5\cos(3x+2), f'(x) = 5 \cdot 3(-\sin(3x+2)) = -15\sin(3x+2)$.

p) $f(x) = \sin(2x)\cos(5x), f'(x) = 2\cos(2x)\cos(5x) - 5\sin(2x)\sin(5x)$.

q) $f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x}, f'(x) = \frac{\cos x(1+\cos x) - \sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2} = \frac{\cos x + 1}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{1+\cos x}$.

r) $f(x) = \ln(3x-2), f'(x) = \frac{3}{3x-2}$

s) $f(x) = \ln(2x^2+1), f'(x) = \frac{4x}{2x^2+1}$.

t) $f(x) = \ln(\ln(x)), f'(x) = \frac{1}{x} \frac{1}{\ln x}$.

u) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), f'(x) = \frac{(x-1) - (x+1)}{(x-1)^2} \frac{x-1}{x+1} = \frac{-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{-2}{x^2-1}$.

v) $f(x) = e^{2x}, f'(x) = 2e^{2x}$.

w) $f(x) = e^{2x^2}e^xe^2 = e^{2x^2+x+2}, f'(x) = (4x+1)e^{2x^2+x+2}$.

x) $f(x) = x^2e^x, f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = (x^2+2x)e^x$.

y) $f(x) = \cos(x)e^{2x}, f'(x) = -\sin(x)e^{2x} + 2\cos(x)e^{2x} = (2\cos(x) - \sin(x))e^{2x}$.

z) $f(x) = e^{x \ln x}, f'(x) = (\ln x + x \frac{1}{x})e^{x \ln x} = (\ln x + 1)e^{x \ln x}$.

Exercice 13. On considère la fonction f définie par $f(x) = -2x^2 + 3x + 5$.

1. f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, $f'(x) = -4x + 3$.

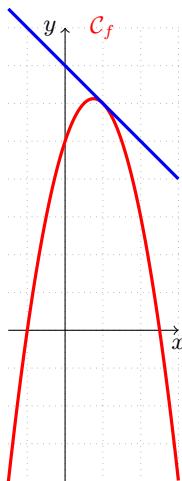
	$-\infty$	$\frac{3}{4}$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{9}{8} + \frac{9}{4} + 5 = \frac{9}{8} + 5 = \frac{49}{8}.$$

Les coordonnées du sommet de la parabole sont $\left(\frac{3}{4}, \frac{49}{8}\right)$.

2. D'après les calculs précédents, $f'(1) = -4 + 3 = -1$ et $f(1) = -2 + 3 + 5 = 6$.

L'équation de la tangente T_1 à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 est $y = f'(1)(x-1) + f(1) = -(x-1) + 6 = -x + 7$.



3. $(x, y) \in T_1 \cap (Ox) \Leftrightarrow 0 = y = -x + 7 \Leftrightarrow (x, y) = (7, 0)$.

4. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Le point de coordonnées (x, y) est dans l'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses ssi $y = 0$, $-2x^2 + 3x + 5 = 0$.

Le discriminant vaut $\Delta = 9 - 4(-2) \cdot 5 = 49 = 7^2$, les racines sont $\frac{-3-7}{-4} = \frac{5}{2}$ et $\frac{-3+7}{-4} = -1$.

Ainsi les coordonnées des points cherchés sont $(-1, 0)$ et $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$.

EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 14. Formules trigonométriques

On utilise les formules données, la parité de cos et imparité de sin.

- 1.

$$\begin{aligned}\cos(a-b) &= \cos(a+(-b)) = \cos(a)\cos(-b) - \sin(a)\sin(-b) \\ &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a-b) &= \sin(a+(-b)) = \sin(a)\cos(-b) + \sin(-b)\cos(a) \\ &= \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)\end{aligned}$$

- 2.

$$\begin{aligned}\cos(2a) &= \cos(a+a) = \cos(a)\cos(a) - \sin(a)\sin(a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) \\ &= \cos^2(a) - (1 - \sin^2(a)) = 2\cos^2(a) - 1 \\ &= (1 - \sin^2(a)) - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a) \\ \sin(2a) &= \sin(a+a) = \sin(a)\cos(a) + \sin(a)\cos(a) = 2\sin(a)\cos(a)\end{aligned}$$

3. En utilisant la deuxième formule du $\cos(2a)$, on a $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$. D'où $2\cos^2(a) = \cos(2a) + 1$. Enfin $\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$.

Exercice 15. Somme des premiers termes d'une suite géométrique

Soit $q \neq 1$.

On pose $S_n = \sum_{i=0}^n q^i$.

$$\text{Ainsi } qS_n = \sum_{i=0}^n qq^i = \sum_{i=0}^n q^{i+1} = \sum_{i=1}^{n+1} q^i = \sum_{i=0}^n q^i + q^{n+1} - q^0.$$

D'où $(q-1)S_n = qS_n - S_n = q^{n+1} - 1$. Ainsi

$$S_n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{-(1 - q^{n+1})}{-(1 - q)} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Exercice 16. Identités remarquables

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. $(a-b)^2 = (a + (-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
- 2.

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + (a^2b + 2aba) + (2abb + b^2a) + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)(a^2 + ab + b^2) &= a^3 + a^2b + ab^2 - (ba^2 + ab^2 + b^3) = a^3 - b^3 \end{aligned}$$

Exercice 17. Fonction tangente

On veut étudier la fonction $\tan = \frac{\sin}{\cos}$:

- 1.

$$\begin{aligned} x \in D_{\tan} &\Leftrightarrow \tan(x) \text{ a un sens} \\ &\Leftrightarrow \cos(x) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

L'ensemble de définition de $\tan$ est $D = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$.

2. Soit $x \in D$, $x + \pi \in D$ et :

$$\begin{aligned} \tan(x + \pi) &= \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{\sin(x)\cos(\pi) + \cos(x)\sin(\pi)}{\cos(x)\cos(\pi) - \sin(x)\sin(\pi)} \\ &= \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x) \end{aligned}$$

Ainsi $\tan$ est π périodique.

Soit $x \in D$, $-x \in D$ et :

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$$

Ainsi $\tan$ est impaire.

$\sin$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur D , $\cos$ est dérivable sur D à valeurs dans $\mathbb{R}^*$. Donc $\tan$ est dérivable sur D par quotient.

De plus, pour $x \in D$,

$$\begin{aligned} \tan'(x) &= \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right)^2 = 1 + \tan^2(x) \end{aligned}$$