Exercices de révisions

COMMENT BIEN PRÉPARER SON ANNÉE DE MATHS SPÉ.

Tout d'abord après cette longue année de sup, profitez bien de vos vacances.

Après le 15 août, réveillez vos neurones.
Une bonne connaissance des aspects fondamentaux du cours de sup est une des clés de la réussite.

Sur le mode de la banque d'exercices d'oral des CCP, nous vous proposons 20 exercices de révision.

Pour que votre travail soit efficace :

- vous veillerez à passer suffisamment de temps à les chercher.
- ne regardez que tardivement le corrigé.
- refaites l'exercice jusqu'à ce que vous n'ayez plus besoin d'aide.

Vous profiterez des exercices pour :

- vous remémorer le cours correspondant en vous assurant que vous avez une bonne compréhension et une bonne connaissance des définitions et des théorèmes.
- vous questionner, vous faire une banque d'exemples et contre-exemples,
- lister vos erreurs (pour ne plus les refaire),
- lister les méthodes de chaque chapître.
- et puis faire un petit tour du coté des mathématiciens célèbres.

Mais :

- ne cherchez pas à faire le cours de spé en avance.
- soyez régulier, ni trop, ni trop peu...
- et surtout prenez du plaisir.

En cas de difficulté vous pouvez nous contacter : `sceroi@ac-strasbourg.fr` ; `severine.enault@ac-strasbourg.fr`

Bon travail

« Mathematics reveals its secrets only to those who approach it with pure love, for its own beauty. »
Archimedes (287 BC – 212 BC))

Exercice 1 *Utilisation des complexes*

1. Trouver les solutions $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ de $z^5 = 1$.
2. Montrer que pour un tel z, on a $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$.
3. On pose $\alpha = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. Montrer que $4\alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0$.
4. Calculer $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

« Mathematics is the most beautiful and most powerful creation of the human spirit. »
Stefan Banach (1892-1945)

Exercice 2 *Calcul de primitive (**1.** hors-programme PCSI)*

Soit $f(x) = \dfrac{5x^2 + 21x + 22}{(x-1)(x+3)^2}$, $x \in]1, +\infty[$

1. Décomposer en éléments simples, la fraction rationnelle $\dfrac{5X^2 + 21X + 22}{(X-1)(X+3)^2}$.
2. En déduire la primitive de f sur $]1, +\infty[$ qui s'annule en 2.

« Perfect numbers like perfect men are very rare. »
René Descartes (1596-1650)

Exercice 3 *Calcul matriciel*

On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -2 & 18 & 12 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.
2. Déterminer $B = P^{-1}AP$.
3. Calculer B^n et montrer que $A^n = PB^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

« If you can't explain it simply, you don't understand it well enough. »
Albert Einstein (1879-1955)

Exercice 4 *Étude d'une fonction*

Soit $f : x \mapsto \ln(1 - \ln x)$.

1. Donner le domaine de définition de la fonction f. Donner les limites aux bornes et construire le tableau de variations de f.
2. Montrer que f admet une fonction réciproque g sur un intervalle à préciser. Exprimer g.
3. Montrer que : $\exists! \alpha \in \mathbb{R}, f(\alpha) = \ln 2$. Trouver α.
4. Montrer que f'' s'annule une seule fois en β que l'on calculera.
5. Donner la tangente en β et la position de la courbe par rapport à cette tangente.

« Mathematics knows no races or geographic boundaries ; for mathematics, the cultural world is one country. »
David Hilbert (1862-1943)

Exercice 5 *Factorisation de polynôme*

On pose $P_n = (X + 1)^n - (X - 1)^n$.

1. Déterminer les racines de P_n.
2. Trouver la factorisation dans $\mathbb{C}$ de P_n.
3. En déduire la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ de P_n.

« Many who had an opportunity of knowing any morabout mathematics confuse it with arithmetic, and consider it an arid science. In reality, however, it is a science which requires a great amount of imagination. »
Sofia Kovalevskaya (1850-1891)

Exercice 6 *Suite d'intégrales*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \sin(\pi t) dt$.

1. Calculer I_0 et I_1 ;
2. Trouver une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n.
3. Montrer que $(I_n)_{n \geq 0}$ converge et qu'elle est décroissante.
4. Déterminer un équivalent de I_n.

« Before creation, God did just pure mathematics.
Then He thought it would be a pleasant change to do some applied. »
John Littlewood (1885-1977)

Exercice 7 *Algèbre linéaire*

Soient $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ et f l'application linéaire définie par :

$$\begin{cases} f(\vec{e}_1) & = & \vec{e}_1 & +2\vec{e}_2 & -\vec{e}_3 \\ f(\vec{e}_2) & = & 2\vec{e}_1 & +7\vec{e}_2 & +3\vec{e}_3 \\ f(\vec{e}_3) & = & & 3\vec{e}_2 & +5\vec{e}_3 \end{cases}$$

1. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.
2. Déterminer l'image et le noyau de f.
3. Montrer que $\mathrm{Im} f$ et $\ker f$ sont supplémentaires.

« Life is good for only two things,
discovering mathematics and teaching mathematics. »
Siméon Poisson (1781-1840)

Exercice 8 *EDOL1*

On considère $x(x^2-1)y' + 2y = x^2$, $\quad (\mathcal{E})$.

1. Préciser sur quel(s) intervalle(s), on résout l'équation $(\mathcal{E})$.
2. Après avoir donné l'équation homogène associée, la résoudre.
3. Résoudre l'équation $(\mathcal{E})$.

« Good mathematics is not about how many answers you know...
It's how you behave when you don't know. »

Exercice 9 *Polynôme et base*

Soit $P = X^3 + X^2 - 2$.

1. Trouver les racines du polynôme sachant qu'une racine est réelle et deux racines sont complexes (on les notera a et b).
2. Soit $L_1 = (X-a)(X-b)$, $L_a = (X-1)(X-b)$ et $L_b = (X-1)(X-a)$. Montrer que (L_1, L_a, L_b) est une base de $\mathbb{C}_2[X]$.
3. Soit $R \in \mathbb{C}_2[X]$. Trouver R tel que $R(1) = 1$ et $R(a) = R(b) = 0$.
4. Montrer que R divise P.

« *If people do not believe that mathematics is simple, it is only because they do not realize how complicated life is.* »
John von Neumann (1903-1957)

Exercice 10 *EDOL2*

Résoudre $y'' + 2y' + y = 2\sin t$.

« *Divide each difficulty into as many parts as is feasible and necessary to resolve it.* »
René Descartes (1596-1650)

Exercice 11 *Calcul de déterminant*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n := \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 5 & 3 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puis $\Delta_n = \det(A_n)$.

1. Calculer Δ_1, Δ_2 et Δ_3.
2. Trouver une relation de récurrence entre Δ_{n+2}, Δ_{n+1} et Δ_n.
3. Écrire Δ_n en fonction de n.

« *A mathematician is a device for turning coffee into theorems.* »
Paul Erdos (1913-1996)

Exercice 12 *Jeu de dés*

On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.

1. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
2. Déterminer $\lim_{n\to\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

« *The whole of mathematics consists in the organization of a series of aids to the imagination in the process of reasoning.* »
Alfred North Whitehead (1861-1947)

Exercice 13 *Etude d'une application linéaire*

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On pose $\phi(P) = \frac{1}{2}(P(X+1) + P(X-1))$.

1. Trouver le degré de $\phi(P)$, avec $P \in \mathbb{R}_n[X]$, ainsi que son coefficient dominant.
2. Montrer que ϕ est injective et linéaire.
3. Montrer qu'il existe un unique $P_k \in \mathbb{R}_k[X]$, $\phi(P_k) = X^k$.
4. Trouver P_0, P_1 et P_2.
5. Montrer que $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

« *A mathematician who is not something of a poet will never be a complete mathematician.* »
Karl Weierstrass (1815-1897)

Exercice 14 *Tirages dans plusieurs urnes*

On a plusieurs urnes. La première contient des boules blanches et des boules noires. La probabilité de tirer une boule blanche est de $p \in]0,1[$. On tire une boule dans l'urne k et on la met dans l'urne de numéo $k+1$ qui contient au départ a boules blanches et a boules noires. On note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si on tire une boule blanche et 0 si on tire une boule noire au k^{e}tirage.

1. Déterminer les lois de X_1 et X_2.
2. Déterminer l'espérance et la variance de X_1 et X_2.
3. En notant $p_k = P(X_k = 1)$, montrer que $p_{k+1} = \frac{1}{2a+1}p_k + \frac{a}{2a+1}$.
4. Exprimer p_k en fonction de a et k.

« *The mathematician does not study pure mathematics because it is useful, he studies it because he delights in it and he delights in it because it is beautiful.* »
Henri Poincaré (1854-1912)

Exercice 15 *Étude d'une série*

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{2n-1}{2n}u_{n-1}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}_+^*$.
2. On pose $v_n = \ln(u_n) - \ln(u_{n-1})$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier la nature de la série de terme général v_n.
3. Conclure quant à la nature de $(u_n)_n$.

*« I have discovered a truly marvelous proof of this,
which however the margin is not large enough to contain. »*
Pierre de Fermat (?-1665)

Exercice 16 *Projections*

1. Donner la matrice représentative dans la base canonique de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur le plan d'équation $x - 2y + z = 0$.
2. Soit p, la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$, sur le plan P d'équation $x + y + z = 0$, parallèlement à la droite D d'équation $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.
   (a) Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
   (b) Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
   Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

« The only way to learn mathematics is to do mathematics. »
Paul Halmos (1916-2006)

Exercice 17 *Urne de Polya*

L'urne $\mathcal{U}$ contient initialement r boules rouges et b boules blanches. On pose $N = r + b$. On tire les boules de $\mathcal{U}$ une à une ; à l'issue de chaque tirage, la boule prélevée dans l'urne est remise, avec c boules de la même couleur.
Pour $n \geq 1$, on note X_n le nombre de boules rouges tirées lors des n premiers tirages, Y_n la variable indicatrice de l'événement « le n^{e}tirage donne une boule rouge ».

1. Déterminer la loi de Y_1.
2. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$,
   $E(Y_{n+1}) = \dfrac{r + cE(X_n)}{N + nc}$.
3. Exprimer X_n à l'aide de $Y_1, \cdots, Y_n$ et en déduire que les Y_n sont identiquement distribuées.
4. Déterminer l'espérance de X_n.

*« Mathematics is not about
numbers, equations, computations, or algorithms,
it is about understanding. »*
William Paul Thurston (1946-2012)

Exercice 18 *Produit scalaire et distance*

Soit E l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$. On pose $H = \{P \in E | P(1) = 0\}$.
Pour $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ et $Q = b_0 + b_1 X + b_2 X^2$, on pose $(P|Q) = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2$.

1. Montrer que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur E.
2. Montrer que H est un hyperplan de E et déterminer une base de H.
3. On considère $P_0 = X$. Calculer la distance entre P_0 et H.

« *The enchanting charms of this sublime science, mathematics, reveals only to those who have the courage to go deeply into it.* »
Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Exercice 19 *Séries numériques*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \ln(n+1) + a\ln(n+2) + b\ln(n+3)$ où a et b sont deux réels fixés.

1. Trouver un équivalent de u_n en fonctions des réels a et b.
   On pourra commencer à déterminer un développement asymptotique à 3 termes.
2. En déduire la nature de la série $\sum u_n$ en fonction des réels a et b.
3. Déterminer la valeur de sa somme quand elle converge.

« *Rigour is to the mathematician what morality is to men.* »
Andre Weil (1906-1988)

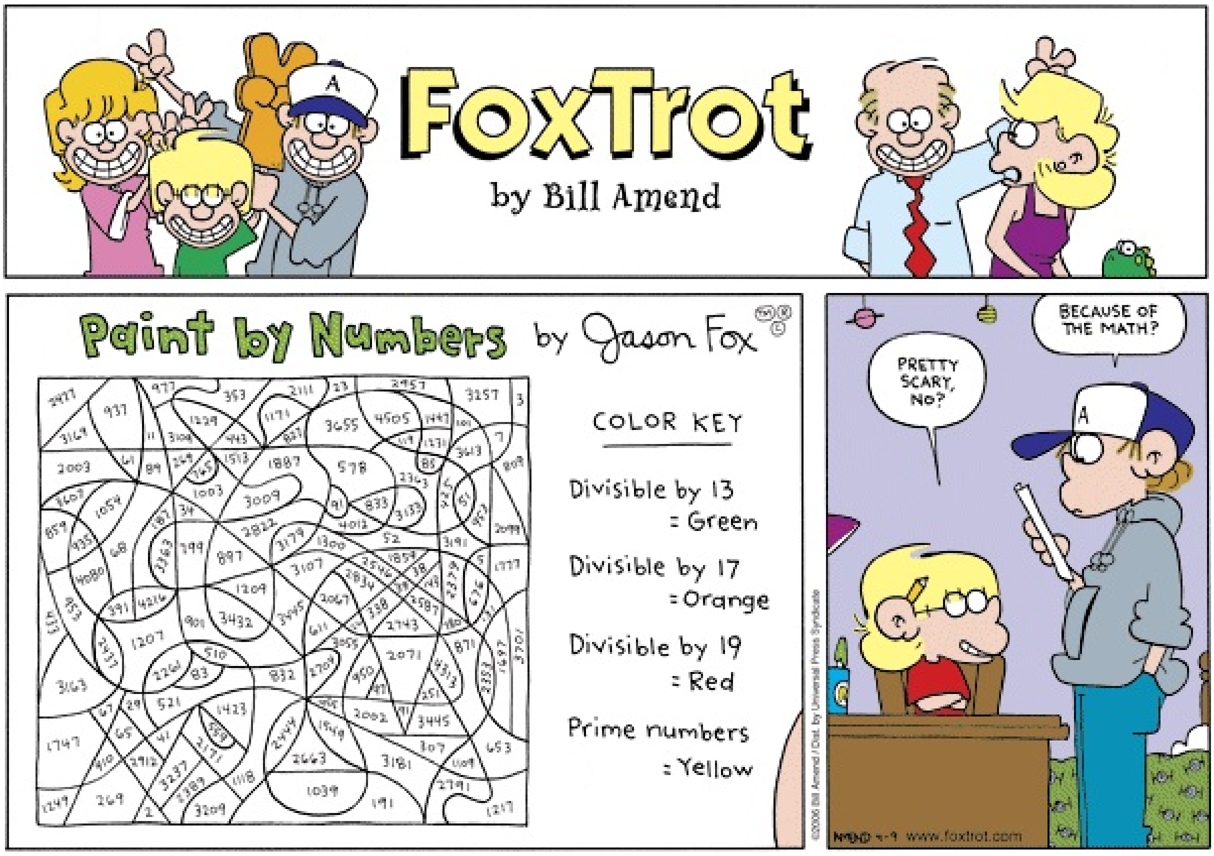
Exercice 20 *Minimum d'une fonction de plusieurs variables*

Soit $a > 0$. Soit f donnée par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, f(x,y) = \frac{a}{x} + \frac{a}{y} + \frac{xy}{a^2}$$

1. Montrer que f possède un minimum local sur $D = [a/3, 9a]^2$.
2. Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
3. Conclure sur la valeur minimum de f et le(s) point(s) où ce minimum est atteint.

On pourra admettre qu'une fonction continue sur un ensemble de la forme $[a,b] \times [c,d]$ où $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+^*$ est bornée et atteint ses bornes.


FoxTrot
by Bill Amend
Paint by Numbers by Jason Fox
COLOR KEY
Divisible by 13 = Green
Divisible by 17 = Orange
Divisible by 19 = Red
Prime numbers = Yellow
PRETTY SCARY, NO?
BECAUSE OF THE MATH?
www.foxtrot.com